

MATEMATIKA · STUDIJNÍ MATERIÁL

Posloupnosti

Aritmetická, geometrická, konvergentní a divergentní

Přehledná teorie, správný matematický zápis, řešené příklady, grafy a procvičení v jednom PDF.

FORMÁT
PDF

ÚROVEŇ
SŠ / začátek VŠ

TÉMA
Posloupnosti

Co si z materiálu odneseš

- rozpoznáš aritmetickou a geometrickou posloupnost,
- sestavíš obecný člen posloupnosti,
- určíš diferenci d a kvocient q ,
- rozhodneš o konvergenci nebo divergenci,
- správně interpretuješ chování členů pro $n \rightarrow \infty$.

01 · ZÁKLADNÍ POJEM

Co je posloupnost?

Posloupnost je uspořádaný seznam čísel. Každému přirozenému indexu n je přiřazen právě jeden člen a_n .

Definice posloupnosti

Posloupnost reálných čísel je zobrazení

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Hodnotu při indexu n zapisujeme jako a_n .

První člen je a_1 , druhý člen a_2 , třetí člen a_3 atd.

Pozor

Posloupnost není spojitá křivka. Je definována pouze pro celočíselné indexy $n = 1, 2, 3, \dots$. V grafu ji proto zobrazujeme jako samostatné body.

02 · ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

Stejný rozdíl mezi sousedními členy

Aritmetická posloupnost vzniká tak, že ke každému členu přičteme stejné číslo. Toto číslo nazýváme **difference** d .

Rekurentní předpis

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Obecný člen

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Diferenci určíme ze sousedních členů:

$$d = a_{n+1} - a_n.$$

Jaký vliv má difference?

Podmínka	Chování	Příklad
$d > 0$	posloupnost roste	2, 5, 8, 11, ...
$d = 0$	posloupnost je konstantní	4, 4, 4, 4, ...
$d < 0$	posloupnost klesá	10, 7, 4, 1, ...

Řešený příklad

Uvažujme posloupnost

$$3, 7, 11, 15, \dots$$

Platí $a_1 = 3$ a $d = 4$. Obecný člen je

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1.$$

Desátý člen:

$$a_{10} = 4 \cdot 10 - 1 = 39.$$

03 • GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

Stejný poměr mezi sousedními členy

Geometrická posloupnost vzniká tak, že každý člen násobíme stejným číslem. Toto číslo nazýváme **kvocient** q .

Rekurentní předpis

$$a_{n+1} = q a_n$$

Obecný člen

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Kvocient určíme jako

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad a_n \neq 0.$$

Jaký vliv má kvocient?

Podmínka	Chování	Příklad
$q > 1$	absolutní hodnoty rostou	2, 4, 8, 16, ...
$q = 1$	posloupnost je konstantní	3, 3, 3, 3, ...
$0 < q < 1$	členy se blíží k nule	8, 4, 2, 1, ...
$-1 < q < 0$	znaménko se střídá, amplituda klesá	4, -2, 1, -0,5, ...
$q = -1$	členy střídají dvě hodnoty	2, -2, 2, -2, ...

Řešený příklad

Uvažujme posloupnost

$$5, 10, 20, 40, \dots$$

Platí $a_1 = 5$ a $q = 2$. Obecný člen je

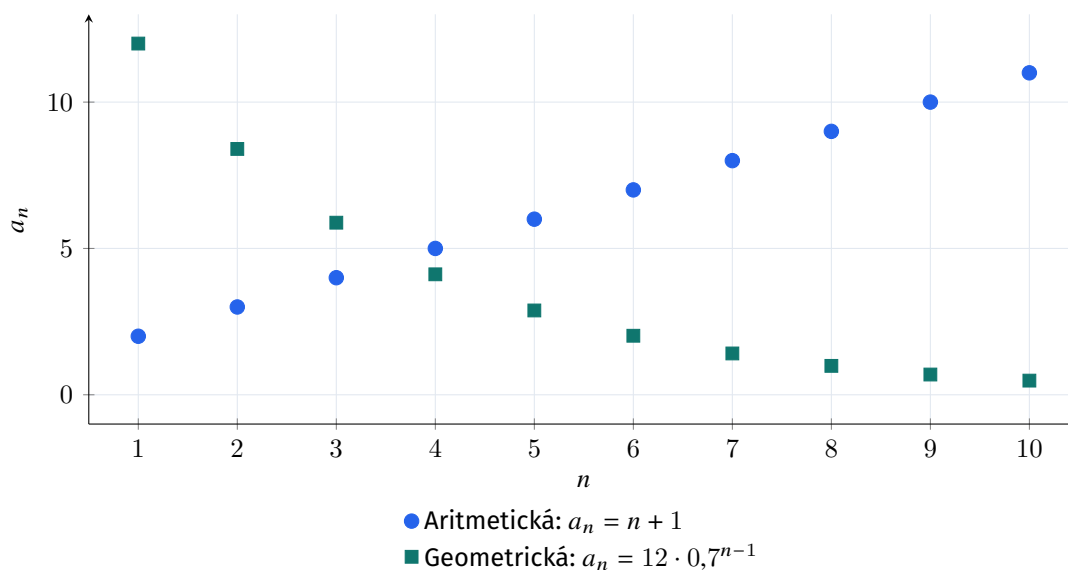
$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}.$$

Šestý člen:

$$a_6 = 5 \cdot 2^5 = 160.$$

04 • GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ

Posloupnosti tvoří diskrétní body



Modrá posloupnost roste lineárně. Zelená posloupnost se postupně přibližuje k nule.

05 • KONVERGENCE A DIVERGENCE

Co se děje pro velká n ?

Posloupnost je **konvergentní**, pokud se její členy přibližují k jednomu konečnému číslu L .

Zápis limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Posloupnost je **divergentní**, pokud konečnou limitu nemá.

Aritmetická posloupnost

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

- $d = 0$: konverguje k a_1 ,
- $d > 0$: diverguje k $+\infty$,
- $d < 0$: diverguje k $-\infty$.

Geometrická posloupnost

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

- $|q| < 1$: konverguje k 0,
- $q = 1$: konverguje k a_1 ,
- $q = -1$: obvykle osciluje,
- $|q| > 1$: diverguje.

Pozor

Omezená posloupnost nemusí být konvergentní. Posloupnost

$$a_n = (-1)^n$$

je omezená, ale střídá hodnoty -1 a 1 , takže nemá limitu.

06 · ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Určení typu a chování posloupnosti

Řešený příklad

Rozhodněte, zda posloupnost

$$a_n = 6 - 3n$$

konverguje. Přepíšeme ji do tvaru

$$a_n = 3 + (n - 1)(-3).$$

Jde o aritmetickou posloupnost s diferencí $d = -3$. Proto

$$a_n \rightarrow -\infty.$$

Posloupnost je divergentní.

Řešený příklad

Rozhodněte, zda posloupnost

$$a_n = 8 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

konverguje. Jde o geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Protože $|q| < 1$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Posloupnost konverguje k nule.

07 · PROCVIČENÍ

Ověř si porozumění

Zkus samostatně**Úloha 1**

Je dána aritmetická posloupnost

$$7, 11, 15, 19, \dots$$

1. Urči a_1 a d .

2. Sestav předpis pro a_n .
3. Vypočítej a_{20} .
4. Rozhodni, zda posloupnost konverguje.

Zkus samostatně**Úloha 2**

Je dána geometrická posloupnost

$$81, 27, 9, 3, \dots$$

1. Urči a_1 a q .
2. Sestav předpis pro a_n .
3. Vypočítej a_6 .
4. Urči limitu posloupnosti.

Zkus samostatně**Úloha 3**

Rozhodni, zda jsou posloupnosti konvergentní, nebo divergentní:

a) $a_n = 4 + \frac{n-1}{2}$

b) $a_n = 10 \cdot 0,8^{n-1}$

c) $a_n = 3(-1)^n$

d) $a_n = -7$

08 • VÝSLEDKY

Kontrola

Úloha 1

$$\begin{aligned}a_1 &= 7, & d &= 4, \\a_n &= 7 + 4(n-1) = 4n + 3, \\a_{20} &= 83.\end{aligned}$$

Posloupnost diverguje k $+\infty$.

Úloha 2

$$a_1 = 81, \quad q = \frac{1}{3},$$

$$a_n = 81 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},$$
$$a_6 = \frac{1}{3}.$$

Posloupnost konverguje k nule.

Úloha 3

- **a)** divergentní,
- **b)** konvergentní k nule,
- **c)** divergentní,
- **d)** konvergentní k -7 .

09 · SHRnutí

Nejdůležitější vztahy

Aritmetická posloupnost

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Konverguje pouze pro $d = 0$.

Geometrická posloupnost

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Pro $|q| < 1$ konverguje k nule. Pro $q = 1$ je konstantní. Pro $q = -1$ obvykle osciluje. Pro $|q| > 1$ diverguje.

Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Toto PDF je bezplatnou statickou verzí výukového materiálu.

Interaktivní verze umožňuje měnit parametry, animovat graf a okamžitě kontrolovat výsledky.

vojtechsteidl.eu/interactive-notes